

Prova scritta di Matematica e Fisica
Concorso di ammissione – Settembre 2017
Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Il candidato risolva due problemi di matematica e due problemi di fisica.

Matematica

1) Un disco privo di massa posto in un piano orizzontale sostiene tre masse puntiformi disposte sul suo bordo. Due di esse (m e $3m$) sono situate agli estremi di un diametro e l'altra massa (m) è posta ad un estremo del diametro ortogonale. Calcolare la posizione del baricentro del sistema. Cambiando le masse, il baricentro può essere un punto esterno al triangolo con vertici le tre masse puntiformi?

2) Determinare, al variare del parametro reale α , il numero delle soluzioni reali distinte dell'equazione nell'incognita x

$$\frac{x^2 - 3x}{\alpha - x} = -2.$$

3) Dimostrare che tra tutti i rettangoli iscritti in un cerchio, i quadrati sono quelli che massimizzano l'area.

Fisica

1) Su un pianeta alieno con lo stesso raggio e massa della Terra ($R = 6400$ km e $M = 6 \times 10^{24}$ kg) ma non in rotazione su se stesso si vuole inviare un satellite in orbita a 500 km di altitudine. Trascurando la resistenza dell'atmosfera, qual è la minima velocità di lancio? (Si utilizzi, per la costante di gravitazione, il valore $G = 6.7 \times 10^{-11}$, in unità SI.)

2) Una persona di 70 kg salta da una finestra posta a due metri dal suolo e atterra senza cadere. Fornire una stima per l'innalzamento massimo di temperatura nella pianta dei piedi causato dall'impatto, supponendo che la massa totale della zona interessata sia di 0.5 kg e che il calore specifico del corpo umano sia di 3500 J/(kg K). Discutere i motivi per cui l'innalzamento reale di temperatura è minore.

3) L'isotopo del radio di peso atomico 228 ha un tempo di dimezzamento di 5.76 anni. Supponendo di avere 1 g di Ra^{228} , quanti atomi ne rimarranno dopo 100 anni? A quanti grammi di Ra^{228} corrisponde tale valore? (Si usi, per il numero di Avogadro, il valore 6×10^{23} .)